

Summer Math Camp Tarvisio - 20/24 Agosto 2024

Esercizi di algebra - corso intermedio

1. La somma di due numeri vale 20 e il loro prodotto vale 144.
Quanto vale la somma dei quadrati dei due numeri?
2. Le tre facce di un parallelepipedo rettangolo misurano $429m^2$, $364m^2$, $231m^2$.
Quanto vale il volume del parallelepipedo in m^3 ?
3. Dato il polinomio $p(x) = (x + 1)^5 + (x - 1)^{11} - 30(x - 2)^4 \cdot x^{29}$, calcolare:
a) $\deg(p)$ b) il termine noto c) la somma dei coefficienti;
d) la somma dei coefficienti dei termini di grado pari.
e) la somma dei coefficienti dei termini di grado dispari.
4. Se $f(x) = 2x + 3$, calcolare: $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ e $f(f(f(f(x))))$.
Trovare una formula chiusa per $f^n(x)$ con $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, $a \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$.
5. Sapendo che $x \in \mathbb{R}^+$ e che $x^6 + \frac{1}{x^6} = 23$, calcolare $x^9 + \frac{1}{x^9}$.
6. Sia a una radice del polinomio $x^3 + x - 1$. Quanto vale la quantità $a^9 - 3a^6 + 4a^3$?
7. Trovare $q(x)$ di terzo grado le cui radici sono la metà dei reciproci delle radici di:
 $p(x) = 3x^3 + 5x^2 - x + 1$.
8. Trovare $p(x)$ monico di grado 3 tale che $p(-2) = 3$, $p(2) = 3$, $p(5) = 24$.
9. Trovare il massimo valore di n per cui $n^6 + 2016$ è multiplo di $n + 4$.
10. Dato $p(x) = (x^3 + 3x + 2)^5$ calcolare i coefficienti dei termini di grado 1, 3, 13, 9.
11. $p(x)$ è un polinomio di grado 4 passante per i 5 punti: $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 7)$, $(4, 10)$, $(5, 13)$.
Trovare $p(10)$.
12. Sia $p(x)$ un polinomio monico di grado 4 tale che $p(n) = 1 + \dots + n$, per $n = 4, 5, 6, 7$.
Calcolare $p(3)$.
13. Se $p(x)$ è un polinomio a coefficienti interi tale che $p(1) = 2$ e $p(2) = 4$, qual è il minimo valore positivo che può assumere $|p(6)|$?
14. Trovare il polinomio di grado 3 che passa per i 4 punti: $(-1, -3)$, $(2, -3)$, $(3, 9)$, $(4, 47)$, utilizzando sia con il metodo di interpolazione di Newton che con quello di Lagrange.
(non è necessario scrivere il polinomio in forma normale).
Calcolare il valore di $p(-2)$.
15. Sia $p(x)$ un polinomio di grado 5 tale che $p(n) = 2^n$ per $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
Calcolare $p(0)$ e $p(7)$.

16. Calcolare $p(3)$ sapendo che $p(x)$ è un polinomio non nullo a coefficienti reali tale che:
 $p(x+1) \cdot (x-1) = p(x) \cdot (x+2)$ per ogni x reale e $p(3) = [p(2)]^2$.

17. Trovare i polinomi resto della divisione tra il dividendo $f(x) = x^{27} - 3x^{11} + 5$ e i divisori:
a) $g_1(x) = x^2 - 1$ b) $g_2(x) = x^2 + 1$

18. Siano a_1, \dots, a_7 le radici di $q(x) = x^7 - 3x^6 - 1$. Calcolare la quantità:

$$\frac{1}{a_1^{12}} + \dots + \frac{1}{a_7^{12}}$$

19. Sia n un numero positivo pari. Sia $p(x)$ un polinomio monico a coefficienti reali di grado $2n$ tale che: $p\left(\frac{1}{k}\right) = k^2$ per $1 \leq |k| \leq n$. Trovare tutti gli altri numeri reali a tali che $p\left(\frac{1}{a}\right) = a^2$.

Risposte da non sbirciare prima di aver provato per un tempo adeguato

1. 112 **2.** 6006 **3.** a) 33 b) 0 c) 2 d) 192 e) -190

4. $f^n(x) = a^n x + b(1 + a + \dots + a^{n-1})$ **5.** 110

6. 1 **7.** $q(x) = c(8x^3 - 4x^2 + 10x + 3)$, $c \neq 0$ **8.** $p(x) = (x+2)(x-2)(x-5) + x^2 - 1$

9. 6008 **10.** 240; 1160; 15; 310

11. 168 **12.** 30 **13.** 8

14. $p(x) = (x+1)(x-2) \left[2(x-3) + 3 \right] - 3 =$
 $= \left[\frac{1}{20}(x-2)(x-3)(x-4) - \frac{1}{2}(x+1)(x-3)(x-4) - \frac{9}{4}(x+1)(x-2)(x-4) + \frac{47}{10}(x+1)(x-2)(x-3) \right]$

15. $p(x) = \frac{1}{120}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + \binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} + \binom{x}{4} + \binom{x}{5}$
 $p(0) = -1$ $p(7) = 6 + 2^7 - 7 - 1 = 126$

16. 16 **17.** a) $r_1(x) = -2x + 5$ b) $r_2(x) = 2x + 5$ **18.** 54 **19.** $\pm \frac{1}{n!}$